



## DETERMINAÇÃO SIMULTÂNEA DA DIFUSIVIDADE TÉRMICA E DE TRANSPORTE DE MASSA EM UM MEIO POROSO ÚMIDO

**Alexandre R. Lima**

**Eduardo F. Barbosa**

**Gilmar Guimarães**

**Ricardo F. Miranda**

Universidade Federal de Uberlândia

Departamento de Engenharia Mecânica

Campus Santa Mônica, 38400-902

**Resumo.** *Desenvolve-se nesse trabalho uma técnica de obtenção simultânea de propriedades termofísicas e de transporte de massa em um meio poroso úmido. As equações governantes do transporte de energia e massa para um meio poroso não saturado são obtidas usando-se condições iniciais e de contorno apropriadas. A determinação das propriedades se dá através da técnica de otimização, baseadas no método das direções conjugadas e em variáveis métricas. As medidas experimentais de temperatura e massa são simuladas numericamente, através da solução das equações e de propriedades prefixadas. Os resultados indicam a potencialidade do uso da técnica de otimização para a determinação de propriedades em meios porosos úmidos.*

**Palavras-chave:** *Meio poroso, Otimização, Propriedades termofísicas*

### 1. INTRODUÇÃO

A identificação de propriedades ou parâmetros termofísicos é de suma importância em vários processos industriais e tecnológicos. Podemos citar alguns como: infiltração de umidade em edificações, alterando o processo de transferência de calor e consequentemente o conforto térmico e seu controle; secagem de grãos; percolação da chuva ou da irrigação no solo, alterando o comportamento do solo e suas propriedades termofísicas e de transporte de massa e, segundo estudos feitos por Sasaki et al. (1985), é importante conhecer estas propriedades pois o controle da temperatura incrementa a produção vegetal.

O calor em um meio poroso úmido não é somente transmitido por condução térmica através do sólido, líquido e do gás nesse meio poroso, mas também pela migração do líquido em função de um gradiente de pressão e da difusão do gás em função de um gradiente térmico nesse meio.

Em técnicas experimentais clássicas, normalmente se obtém medidas de variações de temperatura em amostras porosas considerando-se nos modelos matemáticos apenas a equação da energia. Nesse caso, usualmente se agrupa o transporte de calor em função da difusão do gás no meio ao termo de uma condutividade térmica efetiva. Esse procedimento é normalmente conhecido como método de DeVries, (DeVries, 1958). Entretanto, existem várias argumentações quanto ao uso do método de DeVries, uma vez que o transporte de calor devido a difusão do

vapor deve se agrupar apenas ao termo de condutividade térmica do vapor e não à condutividade térmica efetiva do meio poroso ( Moyné & Degiovanni, 1989). Uma das propostas que vem ganhando força é o tratamento do transporte de energia e de massa de forma distinta. Esta proposta tem o inconveniente experimental da necessidade de se obter a variação de massa de vapor no meio poroso além da variação do campo de temperatura.

A obtenção de medidas da variação de massa de forma precisa e rápida, como requer o sistema, não é uma tarefa fácil. O método tradicional consiste em fatiar o meio poroso e pesá-lo, obtendo-se a distribuição de umidade dentro do meio poroso. Mais o uso de emissões de raios gamma ou mesmo a ressonância magnética, para mapear o teor de umidade dentro do meio poroso tem crescido. Entretanto estes métodos são caros e às vezes perigosos na sua manipulação. Wang (1988) propôs um método experimental simples e barato, para se obter simultaneamente o campo de temperatura e o teor de umidade dentro de uma amostra porosa. Este método consiste em pesar, através de uma balança digital, a variação de massa da amostra com o tempo, obtendo-se assim a variação do teor de umidade dentro dessa amostra.

Outra forma de medição é o uso de sensores que meçam a capacitância elétrica da amostra e correlacionando-a com o teor de umidade. Este método foi proposto por Pinto & Biagi (1997) para a obtenção do teor de umidade em solos, obtendo ótimos resultados. Observa-se nesse sentido que obtenção direta do teor de umidade em amostras porosas permitindo o desenvolvimento de modelos em que se obtenha as propriedades.

Nesse trabalho desenvolve-se uma técnica para a obtenção simultânea das propriedades termofísicas e de transporte de massa em um meio poroso. A determinação da difusividade térmica e razão entre a difusividade termo-mássica e mássica, são feitas usando-se a técnica de otimização baseada no método das direções conjugadas, como o método de Fletcher e Reeves (Vanderplaats, 1984). Uma vez que as equações de energia e transporte de massa são acopladas, torna-se necessários o uso de duas funções objetivo. Cada função é definida pelo erro quadrático entre valores experimentais e calculados, respectivamente, da temperatura e massa. Ainda, nesse trabalho as medidas experimentais de temperatura e de massa foram obtidas através da simulação numérica das equações governantes à partir de propriedades termofísicas e de transporte de massa prefixadas.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Considera-se uma matriz cilíndrica, porosa, rígida, úmida não saturada, homogênea e isotrópica, onde o movimento de líquido é desprezível e as forças capilares são muito maiores que as gravitacionais. Considera-se ainda que se os gradientes de temperatura e umidade são muito grandes a amostra encontra-se em equilíbrio termodinâmico. Nesse caso, pode-se escrever as equações de transferência de calor e massa, respectivamente como

$$\langle \rho c \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = k_{ef} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2} - \rho_v D_m h_{lv} \frac{\partial^2 \langle w_v \rangle}{\partial x^2} - \rho_v D_T h_{lv} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\rho_v \frac{\partial \langle w_v \rangle}{\partial t} = \rho_v D_m \frac{\partial^2 \langle w_v \rangle}{\partial x^2} + \rho_v D_T \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2}, \quad (2)$$

onde:  $\langle \rho c \rangle$  é a média volumétrica local do calor específico dos componentes do meio poroso (sólido, líquido, vapor),  $k_{ef}$  a condutividade térmica efetiva do meio poroso,  $\langle T \rangle$  a temperatura média volumétrica local do meio poroso,  $\rho_v$  a densidade do vapor,  $D_m$  a difusividade mássica do vapor  $D_T$  difusividade termo-mássica do vapor  $h_{lv}$  o calor latente de vaporização do líquido e  $w_v$  a média volumétrica local da fração de mássica do vapor no meio poroso.

Estas equações estão sujeitas às condições iniciais

$$T = T_0, \quad (3)$$

$$W = W_0, \quad 0 < x < L. \quad (4)$$

e às condições de contorno

$$k_{ef} \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$D_m \frac{\partial W}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

em  $x=0$  e

$$T = T_L(t), \quad t > 0 \quad (7)$$

$$\rho(D_m \frac{\partial W}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x}) = h_m(W_L - W_\infty) + h_T(T_L - T_0) \quad (8)$$

em  $x=L$ .

Uma vez que se deseja a obtenção da condutividade aparente, a equação da energia pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \alpha_{ap} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2}, \quad (9)$$

e a equação de massa,

$$\frac{\partial \langle W_v \rangle}{\partial t} = \frac{\partial^2 \langle W_v \rangle}{\partial x^2} + \frac{D_T}{D_m} \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2}, \quad (10)$$

onde  $\alpha_{ap}$  é a difusividade térmica aparente desse meio poroso. Como o fluxo mássico é proporcional à seguinte relação:

$$m \propto D(W_L - W_\infty) \quad (11)$$

De acordo com Wang et all. (1988), temos que

$$m = h_m \left(1 + \frac{\Delta T}{T_o}\right)^{1.81} (W_L - W_\infty) \quad (12)$$

ou ainda

$$m = h_m(W_L - W_\infty) + h_T(T - T_O), \quad (13)$$

uma vez que quando  $|\Delta T| \leq 3K$  e  $T_o \geq 300K$ , pode-se expandir o termo  $\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{1.81}$  em série de Taylor desprezando-se os termos de maior ordem. Ainda, considerando-se a relação:

$$\frac{h_T}{h_m} = \frac{1.81(W_L - W_\infty)}{T_o}, \quad (14)$$

obtém-se a redução de massa de umidade na amostra

$$M(t) = \rho A \int_0^L (W_0 - W) dx \quad (15)$$

Obtém-se assim o coeficiente mássico de difusão,  $h_m$ , através da seguinte relação:

$$h_m = \frac{l}{(W_o - W_\infty)} \frac{dM}{dl} \Big|_{f=0} \quad (16)$$

e portanto

$$h_T = 1.81(W_o - W_\infty) \frac{h_m}{T_o} \quad (17)$$

As expressões de  $h_m$  e  $h_T$  podem ser introduzidas na condição de contorno (5) e resolvendo as equações governantes (9) e (10), pode-se determinar  $T$  e  $W_v$ . Observando-se as Eqs. (9) e (10) juntamente com as condições de contorno, verifica-se que os modelos teóricos para  $T$  e  $W_v$  são funções exclusivas dos parâmetros  $\alpha$  e  $D_T/D_m$ . Esse fato indica a possibilidade da obtenção simultânea dos parâmetros que por simplificação serão chamados de  $\alpha$  e  $d$  respectivamente.

### 3. MINIMIZAÇÃO IRRESTRITA PELO MÉTODO DE DAVIDON, FLETCHER E POWEL (DFP)

O procedimento usado aqui para a obtenção dos parâmetros  $\alpha$  e  $d$  é o da técnica de otimização obtendo-se a difusividade térmica aparente ( $\alpha$ ) e a razão entre as difusividades termo-mássicas e mássica, ( $d=D_T/D_m$ ). Essas técnicas baseiam-se na minimização de uma função objetivo em relação ao parâmetro a ser otimizado. Nesse caso, o procedimento proposto é a otimização das funções objetivos  $S_T$ ,  $S_W$  definidas por

$$S_T = \sum_{i=1}^N [y_1(i) - T_1(i)]^2 \quad (19)$$

e

$$S_W = \sum_{i=1}^N [M_1(i) - M(i)]^2 \quad (20)$$

onde

onde  $y_1(i)$  e  $M_1(i)$  representam a temperatura experimental e a massa experimental, respectivamente,  $i$  o tempo discreto e  $T_1(i)$  e  $W(i)$  a temperatura e massa, calculadas pelo modelos teóricos respectivos dados pela solução das Eqs. (9), (10) e (15).

Observa-se nessas equações que, de fato, tanto  $T(i)$  quanto  $W(i)$  são funções de  $\alpha$  e  $d$ , ou seja

$$T(i) = T(i, \alpha, d) \quad (21)$$

e

$$W(i) = W(i, \alpha, d) \quad (22)$$

Nesse caso, a minimização das funções  $S_T$  e  $S_W$  só seria possível a partir da minimização de ambas as funções em relação aos dois parâmetros ou a definição de uma função multiobjetivo como

$$S = p_1 \sum_{i=1}^N [y_1(i) - T_1(i)]^2 + p_2 \sum_{i=1}^N [M_1(i) - M(i)]^2 \quad (23)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são funções peso para a devida ponderação da influência de cada termo ( Eschenauer et al, 1990).

Entretanto, análises demonstraram que a obtenção de  $\alpha$  e  $d$  podem se dar de forma independente. Pôde-se observar, nesse caso, que  $d$  não exerce nenhuma influência nos resultados para a otimização de  $\alpha$ . Essa observação é comprovada na próxima seção.

O método de minimização usado aqui procura considerar informações de iterações anteriores, na determinação da direção de busca e tem sido empregado com sucesso mesmo quando o número de variáveis de projeto é alto e não se dispõe de nenhuma estimativa inicial do ótimo. Por se tratar de um método de primeira ordem, seu uso depende apenas do conhecimento do gradiente da função objetivo. O conceito básico desse método é criar um vetor que se aproxima da matriz Hessiana à medida que a otimização avança. Esse procedimento melhora a convergência, tornando-a semelhante à encontrada nos métodos de 2ª ordem (Lima e Silva et al, 1998). Nesse método a direção de busca na iteração  $q$  é definida por

$$S^q = -H \nabla F(X)^q \quad (24)$$

onde  $H$  na verdade se aproxima da matriz Hessiana durante o procedimento de otimização para funções quadráticas,  $\nabla F(X)^q$  é o gradiente da função objetivo e  $X$  é a matriz das variáveis de projeto. O  $\nabla F(X)^q$  pode ser calculado numericamente por diferenças finitas. Dadas as condições iniciais, ou seja, o valor inicial das variáveis e conhecido  $S^q$  faz-se uma busca unidimensional pelo método da seção Áurea juntamente com uma aproximação polinomial (Vanderplaats, 1984), pela equação

$$X^q = X^{q-1} + \alpha_q^* \cdot S^q \quad (25)$$

Normalmente na primeira iteração ( $q = 1$ ) após a busca unidimensional, adota-se

$$H^{q+1} = H^q + D^q \quad (26)$$

onde  $H$  é dado por  $H = I_n$ , ou seja a matriz identidade de ordem  $n$  e  $D$  a matriz simétrica de otimização definida por

$$D^q = \frac{1}{\sigma} p p^T - \frac{1}{\tau} H^q y (H^q y)^T \quad (27)$$

onde os vetores de troca  $p$  e  $y$  e os escalares  $\sigma$  e  $\tau$  são definidos como

$$p = X^q - X^{q-1} \quad (28)$$

$$y = \nabla F(X^q) - \nabla F(X^{q-1}) \quad (29)$$

$$\sigma = p \cdot y \quad (30)$$

$$\tau = y^T H^q \quad (31)$$

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Observa-se que no estágio atual desse trabalho foram realizadas simulações numéricas para a obtenção dos dados  $Y_m$  e  $M_m$ . Ou seja, as Eqs. (9), (10) e (15) foram resolvidas para um caso-teste particular simulando uma amostra porosa cilíndrica com as seguintes características: Porosidade ( $\epsilon$ ) igual 0,46, saturação inicial ( $w$ ) de 10%, fluxo de calor imposto na base igual a  $185 \text{ W/m}^2$  tendo a amostra porosa o diâmetro de 56,4 mm e altura de 12,2 mm. As variáveis  $\alpha^*$  e  $d^*$  são então prefixadas para este caso obtendo-se a partir delas as evoluções de temperatura e massa em relação à umidade e o tempo. O uso da técnica será considerado bem sucedido quando partindo de valores diferentes os parâmetros  $\alpha$  e  $d$  convergirem para os valores prefixados. Nesse caso, os valores para a temperatura e massa a partir de  $\alpha^*$  e  $d^*$  são considerados os valores experimentais simulados  $Y_m$  e  $M_m$  usados na definição das funções objetivos  $S_T$  e  $S_W$ , respectivamente.

Considerando a hipótese de obtenção independente da difusividade térmica aparente, a função  $S_T$  é então otimizada para vários valores fixados de  $d$ . A Figura 1 apresenta esses resultados, demonstrando a ausência de qualquer influência entre os valores estimados de  $\alpha$  com a evolução de  $d$ . Observa-se que para essa análise, os valores de  $d$  foram tomados constantes em relação ao tempo como apresentados na Figura 1.

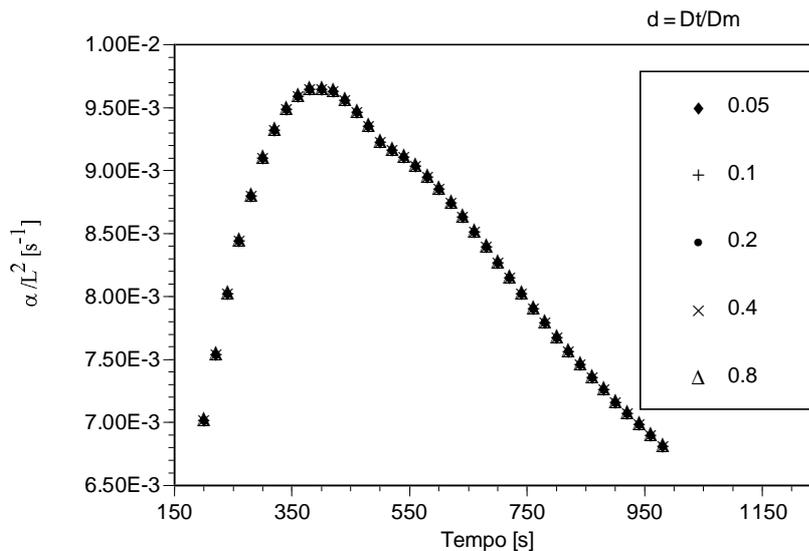


Figura 1 – Otimização de  $S_T$  em função de  $\alpha$  considerando-se vários valores fixados de  $d$ .

Uma vez determinado o valor de  $\alpha$  o parâmetro  $d$  pode ser obtido através da otimização de  $S_W$ . Os resultados dessa otimização são apresentados nas Figuras 3.

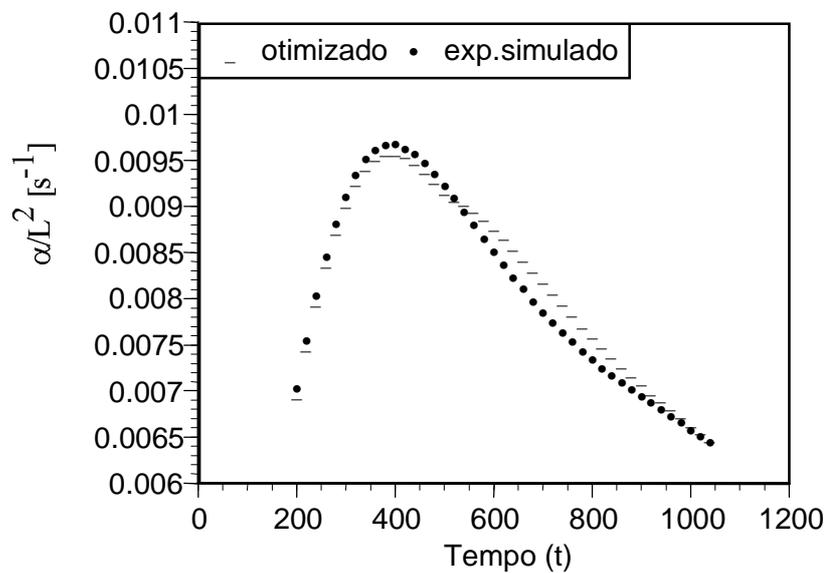


Figura 2 – Comparação entre a evolução prefixada ( $\alpha^*$ ) e a evolução otimizada de  $\alpha$ .

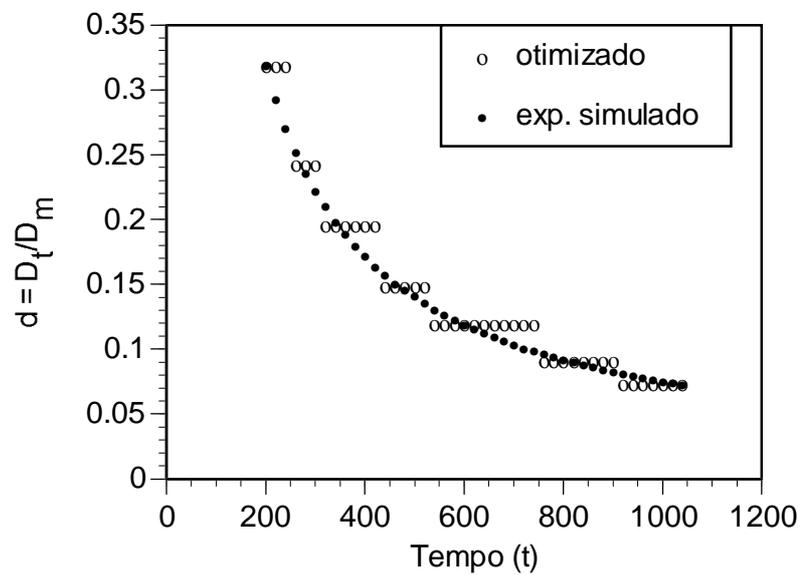


Figura 3 – Comparação entre a evolução prefixada ( $d^*$ ) e a evolução otimizada de  $d$ .

Apenas para verificação dos resultados, apresentam-se nas Figuras 4 e 5 as evoluções de T e W para os valores experimentais simulados e obtidos pela otimização. Observa-se, assim, a boa concordância entre os valores.

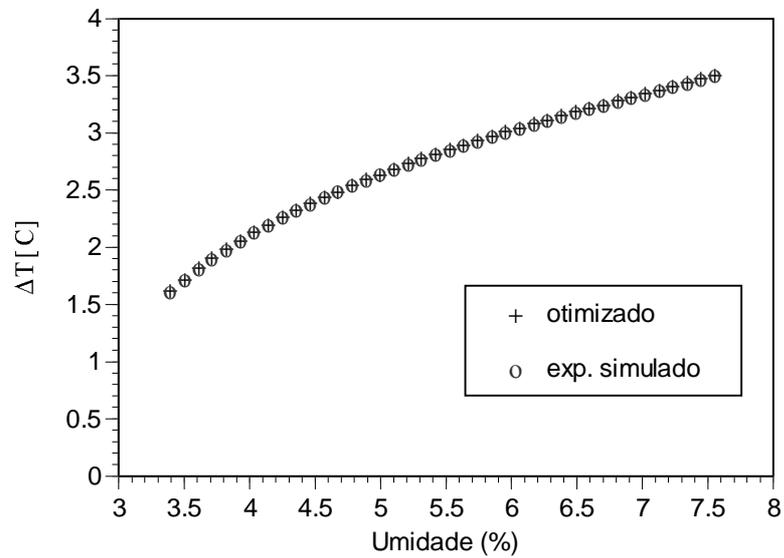


Figura 4 – Comparação entre a evolução de temperatura simulada e a evolução de temperatura a partir dos parâmetros otimizados em função da umidade.

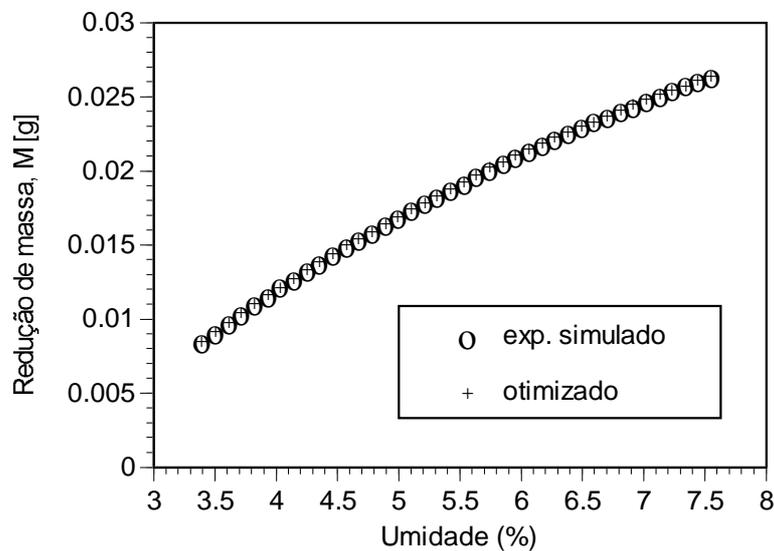


Figura 5 – Comparação entre a evolução da redução da massa simulada,  $M_m$  e da redução de massa,  $M$ , calculada a partir dos parâmetros otimizados (Eq. 15) em função da umidade.

## 5. CONCLUSÃO

Os resultados desse trabalho indicam a grande potencialidade do uso de técnicas de otimização para a determinação de propriedades em meios porosos úmidos. Vislumbra-se ainda, com esse procedimento, a possibilidade da obtenção da condutividade térmica efetiva. O grande desafio, no entanto, encontra-se na elaboração e execução de uma bancada experimental que permita a obtenção das condições de contorno e o estabelecimento do problema físico previstos nos modelos teóricos para a temperatura e a massa do meio.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pelo apoio nesse trabalho.

## REFERÊNCIAS

- DeVries, D. A. (1958). Simultaneous Transfer of Heat and Moisture in Porous Media. Transactions American Geophysical Union. V.39, p. 909-916.
- Eschenauer, H., Koski, J. and Osyczka, A., 1990, Multicriteria Design Optimization, Springer-Verlag, p482.
- Lima e Silva, S. M. M., Guimarães, G., Steffen Jr. V., Duarte, M. A V., 1999, The Application of Optimization Techniques for Thermal Properties Identification, PACAM99, Proc. VI PACAM, pp. 27-30
- Moyne, C. & DeGiovanni, A. (1989). Prise de Mouenne et Conduktivite thermique des Milieux Poreux Humides – Société Française des Thermiciens. Journee d'Etude Sur les Transferts des Thermiques Dans les Milieux Poreux. p. 1-15
- Pinto, C. A. R. e Biage, M. (1997). Desenvolvimento de um Sistema de Monitoramento à Distância de Umidade no Solo. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica – UFU, Uberlândia, p. 01-103.
- Sasaki, A. ; Amda, S. and Fukuda, H. (1985). A Study on the Thermophysical properties of a Soils. International Journal Heat and Mass Transfer, V. 109, p. 232-237
- Vanderplaats G. N., 1984, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, New York, USA
- Wang, B. X.; Han, L. Z. and Yu, W. P. (1988). A Method for Measuring Simultaneously the Heat and Mass Transport Properties of Moist Porous Media. Experimental Thermal and Fluid Science, V. 1, p. 93-98.

## THERMAL DIFFUSIVITY AND MASS TRANSPORT IDENTIFICATION IN A POROUS MEDIA

**Abstract.** *This work develops a technique of simultaneous obtaining of thermal diffusivity and mass transport in a humid porous sample. The governing equations of the transport of energy and mass for a porous medium not saturated are obtained. The optimization technique based on the method of the conjugated directions is used to the thermal properties identification. The experimental measure of temperature and mass are numerically simulated. The results indicate the great potentiality of the optimization technique in the thermal properties identification in porous media*

**Key-words:** *optimization – porous media – parameter estimation*